Ein numerisches Modell für elektromagnetische Wellen

Formelsammlung und elementare Herleitungen: Das Dokument fasst die Grundlagen zusammen, welche für die Realisation der E-Wellen-Animation benötigt werden.

Adrian Haas

2016

1. Konstanten, Formeln und Grössen

Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1.256 \cdot 10^{-6} H/m$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} As/Vm$
Lichtgeschwindigkeit	$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.997925 \cdot 10^8 m/s$
Permittivität	$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$
Permeabilität	$\mu = \mu_0 \mu_r$
Ausbreitungsgeschwindigkeit	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$
elektrische Leitfähigkeit	σ [S/m]
magnetische Feldstärke	$H\ [A/m]$
elektrische Feldstärke	$E\ [V/m]$
Stromdichte	$j = \sigma E\ [A/m^2]$
elektrische Flussdichte	$D = \epsilon E\ [As/m]$
magnetische Flussdichte	$B = \mu H\ [T]$
Raumladungsdichte	$\rho\ [As/m^3]$

2. Maxwellgleichungen

$$div\mathbf{D} = \rho \tag{1}$$

$$div\mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{4}$$

3. Herleitung der Wellengleichung für das E Feld

die dritte Maxwellgleichung

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Anwendung des rot Operators auf beiden Seiten

$$rot(rot\mathbf{E}) = rot(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})$$

$$rot(rot\mathbf{E}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}rot(\mathbf{H})$$

einsetzen der vierten Maxwellgleichung

$$rot(rot\mathbf{E}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})$$

da $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$

$$rot(rot\mathbf{E}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\mathbf{E} + \epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

$$rot(rot\mathbf{E}) = -\sigma\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

da allgemein $rot(rot\mathbf{A}) = grad(div\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$

$$grad(div\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E} = -\sigma\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

einsetzen der ersten Maxwellgleichung

$$grad(\frac{\rho}{\epsilon}) - \Delta\mathbf{E} = -\sigma\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

quellfrei $\rho = 0$

$$-\Delta\mathbf{E} = -\sigma\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$-\frac{1}{\mu\epsilon}\Delta\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{c^2\Delta\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad (5)}$$

verlustlos $\sigma = 0$

$$\boxed{c^2 \Delta \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}} \tag{6}$$

4. Herleitung der Wellengleichung für das H Feld

die vierte Maxwellgleichung

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Anwendung des rot Operators auf beiden Seiten

$$rot(rot\mathbf{H}) = rot(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})$$

da $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$

$$rot(rot\mathbf{H}) = rot(\sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

$$rot(rot\mathbf{H}) = \sigma rot\mathbf{E} + \epsilon rot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

einsetzen der dritten Maxwellgleichung

$$rot(rot\mathbf{H}) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$rot(rot\mathbf{H}) = -\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

da allgemein $rot(rot\mathbf{A}) = grad(div\mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$

$$grad(div\mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H} = -\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

einsetzen der zweiten Maxwellgleichung

$$grad(0) - \Delta \mathbf{H} = -\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$-\Delta \mathbf{H} = -\sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$-\frac{1}{\mu\epsilon} \Delta \mathbf{H} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{c^2 \Delta \mathbf{H} = \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}} \tag{7}$$

verlustlos $\sigma = 0$

$$c^2 \Delta \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \tag{8}$$

5. Explizite Differenzengleichung für das E Feld

a) verlustlos (6)

$$c^2(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}) = E_{tt}$$

mit

$$E_{xx} = \frac{E_{i+1,j,k,n} - 2E_{i,j,k,n} + E_{i-1,j,k,n}}{\Delta x^2}$$
$$E_{yy} = \frac{E_{i,j+1,k,n} - 2E_{i,j,k,n} + E_{i,j-1,k,n}}{\Delta y^2}$$
$$E_{zz} = \frac{E_{i,j,k+1,n} - 2E_{i,j,k,n} + E_{i,j,k-1,n}}{\Delta z^2}$$
$$E_{tt} = \frac{E_{i,j,k,n+1} - 2E_{i,j,k,n} + E_{i,j,k,n-1}}{\Delta t^2}$$

für die zeitliche Iteration muss $E_{i,j,k,n+1}$ berechnet werden

$$c^2(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}) = \frac{E_{i,j,k,n+1} - 2E_{i,j,k,n} + E_{i,j,k,n-1}}{\Delta t^2}$$

somit

$$E_{i,j,k,n+1} = c^2 \Delta t^2 (E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}) + 2E_{i,j,k,n} - E_{i,j,k,n-1} \tag{9}$$
$$E_{i,j,k,n+1} = c^2 \Delta t^2 (E_{xx} + E_{yy}) + 2E_{i,j,k,n} - E_{i,j,k,n-1} \tag{10}$$
$$E_{i,j,k,n+1} = c^2 \Delta t^2 E_{xx} + 2E_{i,j,k,n} - E_{i,j,k,n-1} \tag{11}$$

wobei (9) den drei-, (10) den zwei- und (11) den eindimensionalen Fall beschreibt.

b) verlustbehaftet (5)

$$c^2(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}) = \frac{\sigma}{\epsilon} E_t + E_{tt}$$

explizite Differenzengleichungen

$$E_{xx} = \frac{E_{i+1,j,k,n} - 2E_{i,j,k,n} + E_{i-1,j,k,n}}{\Delta x^2}$$

$$E_{yy} = \frac{E_{i,j+1,k,n} - 2E_{i,j,k,n} + E_{i,j-1,k,n}}{\Delta y^2}$$

$$E_{zz} = \frac{E_{i,j,k+1,n} - 2E_{i,j,k,n} + E_{i,j,k-1,n}}{\Delta z^2}$$

$$E_{tt} = \frac{E_{i,j,k,n+1} - 2E_{i,j,k,n} + E_{i,j,k,n-1}}{\Delta t^2}$$

$$E_t = \frac{E_{i,j,k,n+1} - E_{i,j,k,n}}{\Delta t}$$

für die zeitliche Iteration muss $E_{i,j,k,n+1}$ berechnet werden

$$a = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$c^2(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}) = \frac{E_{i,j,k,n+1} - 2E_{i,j,k,n} + E_{i,j,k,n-1}}{\Delta t^2} + a\frac{E_{i,j,k,n+1} - E_{i,j,k,n}}{\Delta t}$$

$$c^2(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}) = (\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{a}{\Delta t})E_{i,j,k,n+1} - (\frac{2}{\Delta t^2} + \frac{a}{\Delta t})E_{i,j,k,n} + \frac{1}{\Delta t^2}E_{i,j,k,n-1}$$

mit

$$b_1 = \frac{1}{\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{a}{\Delta t}}$$

$$b_2 = \frac{2}{\Delta t^2} + \frac{a}{\Delta t}$$

$$b_3 = \frac{1}{\Delta t^2}$$

$$E_{i,j,k,n+1} = b_1[c^2(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}) + b_2 E_{i,j,k,n} - b_3 E_{i,j,k,n-1}] \quad (12)$$

$$E_{i,j,k,n+1} = b_1[c^2(E_{xx} + E_{yy}) + b_2 E_{i,j,k,n} - b_3 E_{i,j,k,n-1}] \quad (13)$$

$$E_{i,j,k,n+1} = b_1[c^2 E_{xx} + b_2 E_{i,j,k,n} - b_3 E_{i,j,k,n-1}] \quad (14)$$

wobei (12) den drei-, (13) den zwei- und (14) den eindimensionalen Fall beschreibt.

6. Stabilitätskriterien

Für

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$$

gilt

$$\Delta t = S\frac{\Delta}{c}$$

mit Stabilitätsfaktor S.

$$S = \frac{1}{\sqrt{d}}$$

d: Dimension 1,2 oder 3.

7. Randbedingungen

Mit der Bedingung $E_{rand} = 0$ wird die einfallende Welle total reflektiert. Im eindimensionalen Fall kann mit folgenden Bedingungen die Welle absorbiert werden.

$$E_{0,n} = E_{1,n-1}$$

$$E_{N_x-1,n} = E_{N_x-2,n-1}$$

wobei N_x die Länge des Gitters ist.

Für zwei und drei Dimensionen werden ABC (Absorbing Boundary Conditions) verwendet wie in [3] beschrieben. Die Reflexionen verschwinden nicht ganz und betragen ein bis fünf Prozent. Ausgehend von den Engquist-Majda Einweg Wellengleichungen (Taylor Approximation zweiter Ordnung) :

$x = 0$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

$x = N_x$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

$y = 0$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0$$

$y = N_y$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0$$

werden finite Differenzen gebildet, welche Mur ABC genannt werden.

Für x=0 und $\Delta = \Delta_x = \Delta_y$:

$$E_{0,j,n+1} = -E_{1,j,n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta}(E_{1,j,n+1} + E_{0,j,n-1}) + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta}(E_{0,j,n} + E_{1,j,n})$$

$$+\frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta(c\Delta t + \Delta)}(E_{0,j+1,n} - 2E_{0,j,n} + E_{0,j-1,n} + E_{1,j+1,n} - 2E_{1,j,n} + E_{1,j-1,n})$$

Für $x = N_x$, $y = 0$ und $y = N_y$ werden die Indexe gemäss den Einweggleichungen ausgetauscht.

Die Reflexionen an den Ecken werden mit

$$E_{0,0,n} = E_{1,1,n-2}$$

$$E_{0,N_{y-1},n} = E_{1,N_{y-2},n-2}$$

$$E_{N_{x-1},0,n} = E_{N_{x-2},1,n-2}$$

$$E_{N_{x-1},N_{y-1},n} = E_{N_{x-2},N_{y-2},n-2}$$

unterdrückt.

Für drei Dimensionen lauten die Einweggleichungen:

$x = 0$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

$x = N_x$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

$y = 0$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

$y = N_y$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

$z = 0$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

$z = N_z$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{c}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

Für $x = 0$ und $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$

$$E_{0,j,k,n+1} = -E_{1,j,k,n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta}(E_{1,j,k,n+1} + E_{0,j,k,n-1}) + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta}(E_{0,j,k.n} + E_{1,j,k,n})$$

$$+\frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta(c\Delta t + \Delta)}(E_{0,j+1,k,n} - 4E_{0,j,k,n} + E_{0,j-1,k,n} + E_{1,j+1,k,n} - 4E_{1,j,k,n} + E_{1,j-1,k,n}$$
$$+E_{0,j,k+1,n} + E_{0,j,k-1,n} + E_{1,j,k+1,n} + E_{1,j,k-1,n})$$

Für $x = N_x$, $y = 0$, $y = N_y$, $z = 0$ und $z = N_z$ werden die Indexe gemäss den Einweggleichungen ausgetauscht.

Die Reflexionen an den Kanten und Ecken werden mit

$$E_{0,0,k,n} = E_{1,1,k,n-2}$$

$$E_{0,N_{y-1},k,n} = E_{1,N_{y-2},k,n-2}$$
$$E_{N_{x-1},0,k,n} = E_{N_{x-2},1,k,n-2}$$
$$E_{N_{x-1},N_{y-1},k,n} = E_{N_{x-2},N_{y-2},k,n-2}$$
$$E_{i,0,0,n} = E_{i,1,1,n-2}$$
$$E_{i,0,N_{z-1},n} = E_{i,1,N_{z-2},n-2}$$
$$E_{i,N_{y-1},0,n} = E_{i,N_{y-2},1,n-2}$$
$$E_{i,N_{y-1},N_{z-1},n} = E_{i,N_{y-2},N_{z-2},n-2}$$
$$E_{0,j,0,n} = E_{1,j,1,n-2}$$
$$E_{0,j,N_{z-1},n} = E_{1,j,N_{z-2},n-2}$$
$$E_{N_x-1,j,0,n} = E_{N_x-2,j,1,n-2}$$
$$E_{N_{x-1},j,N_{z-1},n} = E_{N_{x-2},j,N_{z-2},n-2}$$

unterdrückt.

8.Quellen

[1]Taschenbuch der Hochfrequenztechnik, Meinke Gundlach, fünfte Auflage Springer Verlag (für Abschnitt 1 bis 4)
[2] Stichwort Finite Differenzen Methode (diverse Literatur) (für Abschnitt 5)
[3] computational electrodynamics, the finite-difference-time-domain method, third edition, Taflove Hagness, Artech House (für Abschnitt 6 und 7)